Name: Zusammenfassung Beweis Sinussatz 01.11.2022

① Vergleich der Flächeninhaltsformeln

Wir berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel

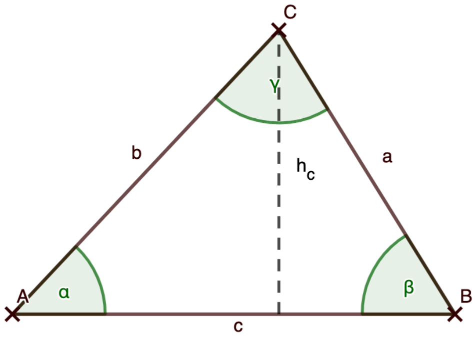
$$A_c = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

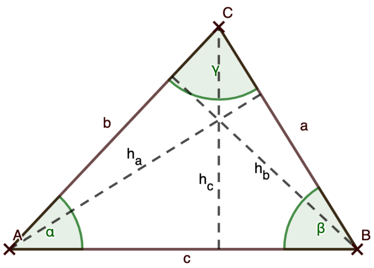
Für den Winkel α gilt:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad \longrightarrow h_c = \sin\alpha \cdot b$$

eingesetzt in die Flächeninhaltsformel ist:

$$A_c = \frac{1}{2} c \cdot b \ \cdot sin\alpha$$





Wir wiederholen das Vorgehen für die Grundseiten a und b und erhalten damit:

$$A_a = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$A_b = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin\gamma$$

Die Flächeninhalte sind alle identisch, da wir das gleiche Dreieck betrachten. Daher können wir die Terme gleichsetzen.

$$\frac{1}{2} c \cdot b \ \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin\gamma \qquad | \cdot 2$$

$$c \cdot b \ \cdot \sin\alpha = a \cdot c \cdot \sin\beta = b \cdot a \cdot \sin\gamma \qquad | : (abc)$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

② Untersuchung der Höhe in den verschiedenen Dreiecksarten

Wir zeichnen die Höhe h_c ein und stellen damit folgende Beziehungen auf:

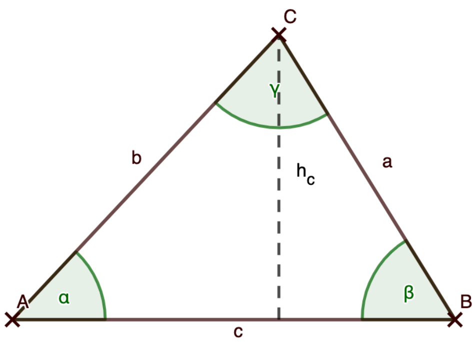
$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \qquad \longrightarrow h_c = \sin\alpha \cdot b$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a} \qquad \longrightarrow h_c = \sin\beta \cdot a$$

Diese Formeln werden nach h_c aufgelöst und gleichgesetzt.

$$\sin\beta \cdot a = \sin\alpha \cdot b \quad | : (ab)$$

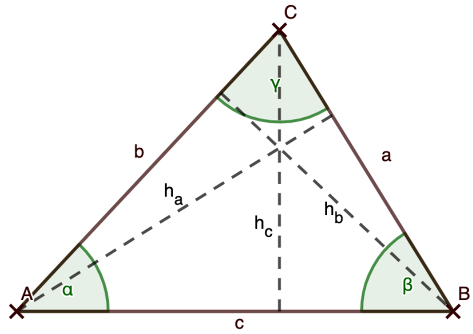
$$\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}}$$



Gleiches wird mit der Höhe h_a und h_b wiederholt.

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c} \qquad \sin\beta = \frac{h_a}{c}$$

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

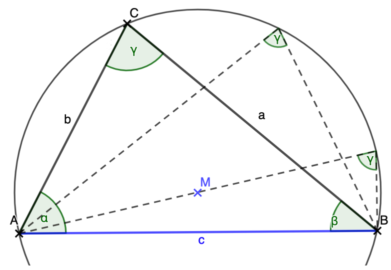


Diese Formeln werden nach h_a bzw. h_b aufgelöst und gleichgesetzt.

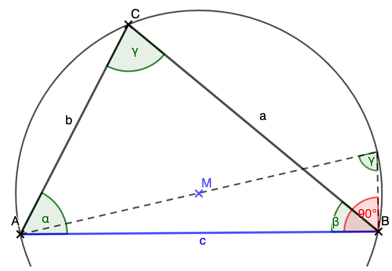
$$\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

Dieses Vorgehen wird genauso für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke wiederholt.

③ Beziehungen der Winkel am Umkreis



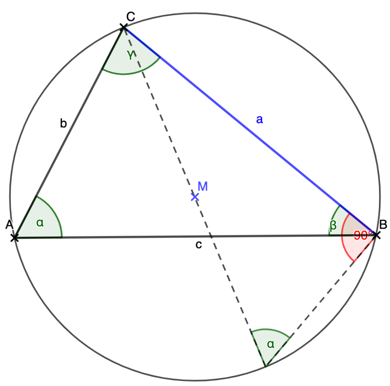
1) Wir zeichnen um das Dreieck einen Umkreis.
2) Wenn wir zwei Punkte (A&B) fest lassen und nur den dritten Punkt C variieren, so ändert sich auf grund des Peripheriewinkelsatzes der Winkel am Punkt C nicht.



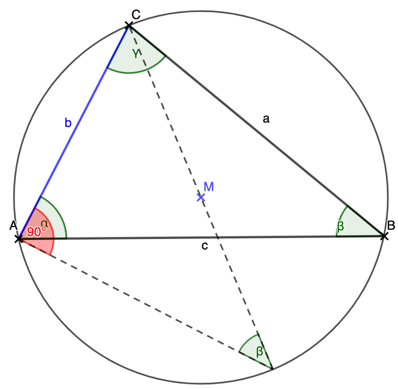
3) Wir drehen wir den Punkt C so weit, dass die Seite b durch den Mittelpunkt geht und damit ein Durchmesser d ist.
4) Laut Satz des Thales am gegenüberliegenden Punkt B ein rechter Winkel.
5) Beschreiben wir damit γ:

$$\sin\gamma = \frac{c}{d} \qquad \longrightarrow d = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Das gleiche Vorgehen beim Verschieben des Punktes A & B führt zu:



$$\sin\alpha = \frac{a}{d} \qquad \longrightarrow d = \frac{a}{\sin\alpha}$$



$$\sin\beta = \frac{b}{d} \qquad \longrightarrow d = \frac{b}{\sin\beta}$$

Die Formeln für d gleichsetzen:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$