

### ① Vergleich der Flächeninhaltsformeln

Wir berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks durch die Formel

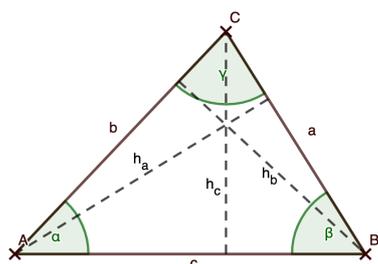
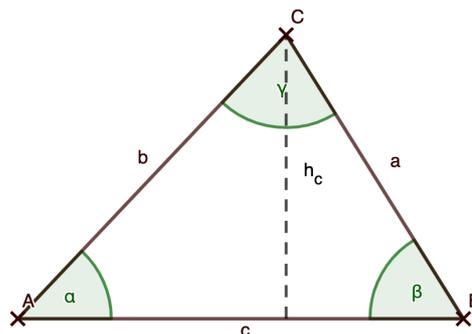
$$A_c = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

Für den Winkel  $\alpha$  gilt:

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad \longrightarrow \quad h_c = \sin \alpha \cdot b$$

eingesetzt in die Flächeninhaltsformel ist:

$$A_c = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin \alpha$$



Wir wiederholen das Vorgehen für die Grundseiten a und b und erhalten damit:

$$A_a = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$A_b = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \sin \gamma$$

Die Flächeninhalte sind alle identisch, da wir das gleiche Dreieck betrachten. Daher können wir die Terme gleichsetzen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \sin \gamma & | \cdot 2 \\ c \cdot b \cdot \sin \alpha &= a \cdot c \cdot \sin \beta = b \cdot a \cdot \sin \gamma & | : (abc) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}}$$

### ② Untersuchung der Höhe in den verschiedenen Dreiecksarten

Wir zeichnen die Höhe  $h_c$  ein und stellen damit folgende Beziehungen auf:

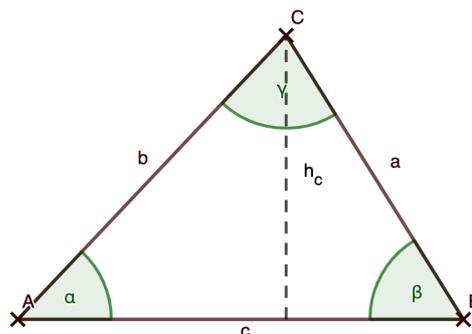
$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b} \quad \longrightarrow \quad h_c = \sin \alpha \cdot b$$

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a} \quad \longrightarrow \quad h_c = \sin \beta \cdot a$$

Diese Formeln werden nach  $h_c$  aufgelöst und gleichgesetzt.

$$\sin \beta \cdot a = \sin \alpha \cdot b \quad | : (ab)$$

$$\boxed{\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}}$$



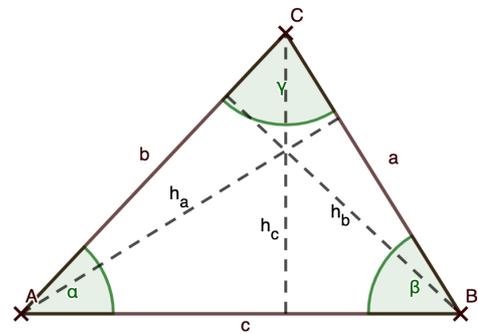
Gleiches wird mit der Höhe  $h_a$  und  $h_b$  wiederholt.

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c} \quad \sin \beta = \frac{h_a}{c}$$

$$\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \quad \sin \gamma = \frac{h_a}{b}$$

Diese Formeln werden nach  $h_a$  bzw.  $h_b$  aufgelöst und gleichgesetzt.

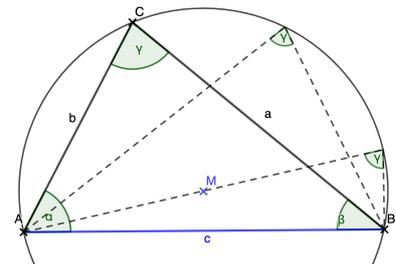
$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



Dieses Vorgehen wird genauso für stumpfwinklige und rechtwinklige Dreiecke wiederholt.

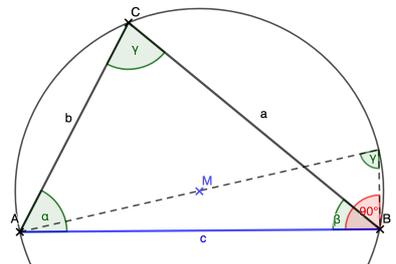
### ③ Beziehungen der Winkel am Umkreis

- 1) Wir zeichnen um das Dreieck einen Umkreis.
- 2) Wenn wir zwei Punkte (A&B) fest lassen und nur den dritten Punkt C variieren, so ändert sich auf grund des Peripheriewinkelsatzes der Winkel am Punkt C nicht.

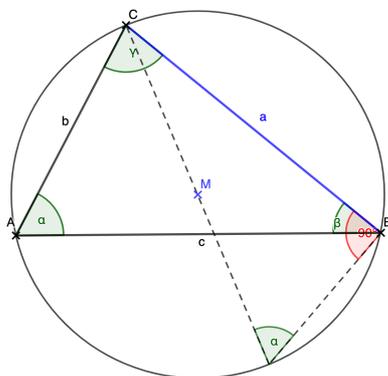


- 3) Wir drehen wir den Punkt C so weit, dass die Seite b durch den Mittelpunkt geht und damit ein Durchmesser d ist.
- 4) Laut Satz des Thales am gegenüberliegenden Punkt B ein rechter Winkel.
- 5) Beschreiben wir damit  $\gamma$ :

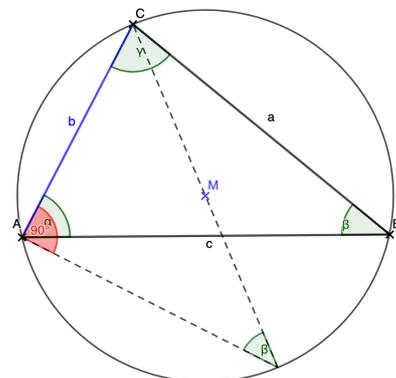
$$\sin \gamma = \frac{c}{d} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{c}{\sin \gamma}$$



Das gleiche Vorgehen beim Verschieben des Punktes A & B führt zu:



$$\sin \alpha = \frac{a}{d} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{a}{\sin \alpha}$$



$$\sin \beta = \frac{b}{d} \quad \longrightarrow \quad d = \frac{b}{\sin \beta}$$

Die Formeln für d gleichsetzen:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$