

Die Produktregel

Die Ableitung eines Produktes von Funktionen

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung eines Produktes $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gefunden werden, falls die Ableitungen von u und v bekannt sind.

- ① Bei einer Summe $f = u + v$ von Funktionen gilt $f' = u' + v'$.



Gibt es für ein Produkt $f = u \cdot v$ eine entsprechende einfache Ableitungsregel?

u	v	$f=u \cdot v$	richtige Ableitung f'	u'	v'	Kombination aus u, v, u' und v'
x	3x	$3x^2$	6x	1	3	
x	x^2	x^3				
x^2	x^3					
x^2	x^5					

- ② Vermutung:

Die Ableitung von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ **[[$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$]].**

③ Kurzform eines Beweises zur Ableitung eines Produktes ($g \cdot h$) von Funktionen:

$$\text{Binomische Formel: } (u + v)^2 = u^2 + 2 u \cdot v + v^2$$

Beide Seiten ableiten:

(1)

$$2(u+v)(u+v)' = 2u u' + 2(u v') + 2v v' \quad (\text{mit Kettenregel})$$

(2)

$$(u+v)(u'+v') = u u' + (u v') + v v'$$

(3)

$$u u' + u v' + v u' + v v' = u u' + (u v') + v v'$$

(4)

$$u v' + v u' = (u \cdot v)'$$

④ Erläutern Sie

- warum in Zeile (1) auf der linken Seite der Term $(u + v)'$ und auf der rechten Seite die Terme u' und v' stehen.
- warum in Zeile (1) nur die mit Pfeilen gekennzeichneten Funktionen abgeleitet werden, aber das Produkt $(u \cdot v)$ nur mit Ableitungszeichen versehen wird.
- welche Umformung von Zeile (1) nach Zeile (2) durchgeführt wurde.
- nach welcher Rechenregel von Zeile (2) nach Zeile (3) die linke Seite umgeformt wurde.
- das Ergebnis in Zeile (4) in Worten.