Integralrechnung

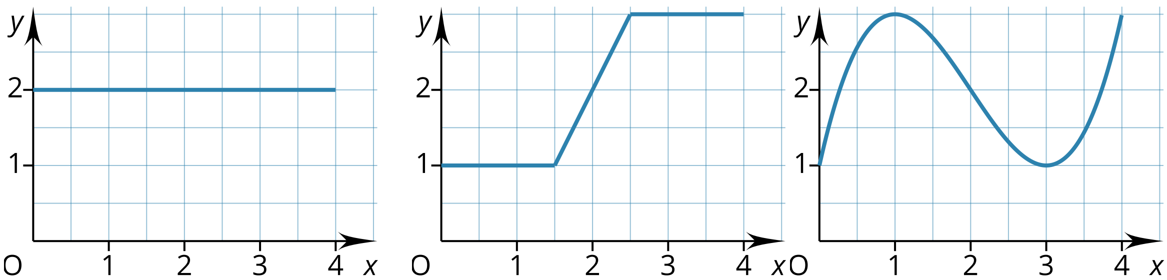
1 Einstiegsbeispiele

① Ein Auto fährt zwei Stunden mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Danach auf der Autobahn eine Stunde mit 130 km/h und zum Abschluss eine halbe Stunde mit 50 km/h.

a) Welche Strecke hat das Auto insgesamt zurückgelegt?
b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit war das Fahrzeug unterwegs?
c) Zu Beginn der Fahrt zeigte der Kilometerzähler 33200 km. Welche Zahl zeigt er am Ende der Fahrt?

② Die abgebildeten Graphen beschreiben die Geschwindigkeit (in dl/min), mit der zu einem bestimmten Zeitpunkt x (in min) Wasser in einen zu Beginn leeren Eimer fließt.

a) In welchem Eimer befindet sich am Ende am meisten Wasser?
b) Wie viel Wasser befindet sich nach 2 min bzw. 4 min jeweils in den Eimern? Berechnen Sie oder schätzen Sie möglichst genau!



1 Bestimmte Integrale

Die Funktion f beschreibe die momentane Änderung einer Größe. Ihr Graph sei K_f. Die Gesamtänderung in einem Bereich kann dann mit der Fläche zwischen K_f und der x-Achse in diesem Bereich identifiziert werden. Dabei wird Flächen unterhalb der x-Achse ein negativer Wert zugeordnet, Flächen oberhalb der x-Achse ein positiver; man sagt, der Flächeninhalt ist orientiert.
Solche orientierten Flächeninhalte werden Integrale genannt.

$$\int_a^b f(x)dx$$

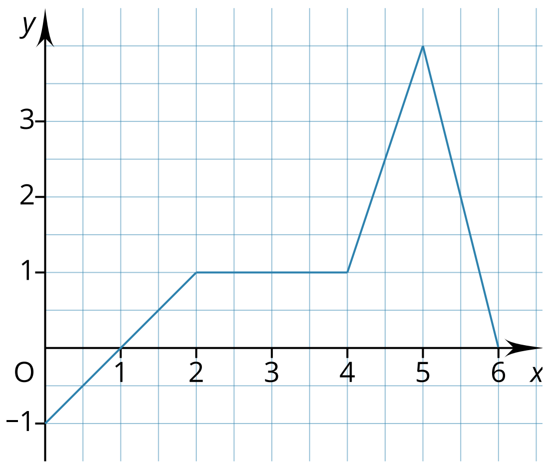
Ist die Funktion der momentanen Änderung (stückweise) linear, kann die Gesamtänderung mithilfe der Formeln für Dreiecks- und Rechtecksflächen berechnet werden.

Beispiel: Das nebenstehende Schaubild zeigt den Graphen einer Funktion f.
Es gilt

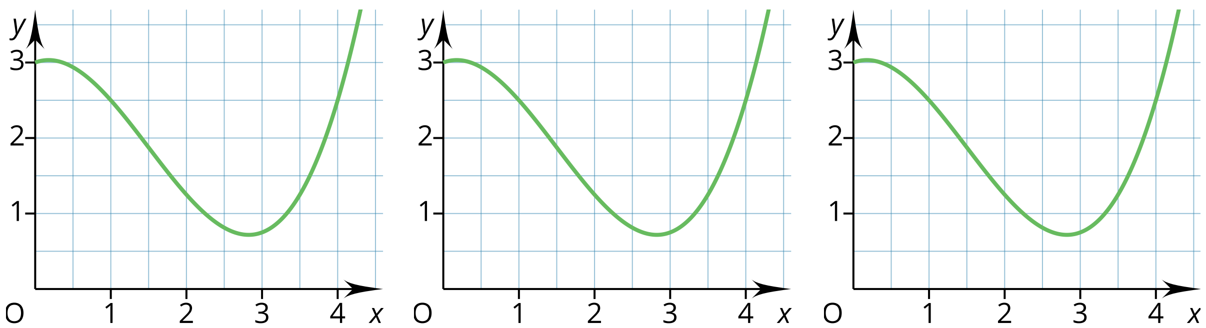
$\int_0^1 f(x)dx =$ $\int_4^5 f(x)dx =$

$\int_1^2 f(x)dx =$ $\int_0^2 f(x)dx =$

$\int_2^4 f(x)dx =$ $\int_0^6 f(x)dx =$



Für allgemeine Funktionen kann man sich an das Integral durch Rechtecke annähern.



③ Die obigen Schaubilder zeigen den Graphen einer Funktion g.

a) Schätzen Sie $\int_0^4 g(x)dx$ mithilfe von Rechtecken der Breite 2, 1 und 0,5 ab.

b) Schätzen Sie $\int_0^4 g(x)dx$ ebenso durch das Zählen einzelner Kästchen ab.

3 Stammfunktionen

F heißt Stammfunktion von f, wenn f die Ableitungsfunktion von F ist: $F'(x) = f(x)$
f beschreibt also die momentane Änderung von F. Da man den Graphen von F in y-Richtung verschieben kann, ohne seine momentane Änderung zu verändern, ist die Stammfunktion nur bis auf einen Summanden $C \in \mathbb{R}$ eindeutig.

Aus den Ableitungsregeln ergeben sich folgende **Regeln für Stammfunktionen**:
Ist f eine Funktion, so gilt für ihre Stammfunktion F:

$f(x) = ax^k$	$F(x) = \frac{a}{k+1}x^{k+1} + C$
$f(x) = ae^{bx}$	$F(x) = \frac{a}{b}e^{bx} + C$
$f(x) = a \cdot sin(bx)$	$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot cos(bx) + C$
$f(x) = a \cdot cos(bx)$	$F(x) = \frac{a}{b} \cdot sin(bx) + C$

Zur Kontrolle die Stammfunktion ableiten.

Außerdem gilt:
Ist G eine Stammfunktion von g, so ist $F + G$ eine Stammfunktion von $f + g$.

4 Bestimmen Sie alle Stammfunktionen.

a) $f(x) = 2x^3$

b) $f(x) = -e^{2x}$

c) $f(x) = 3 \cdot sin(0{,}5x) + 4$

4 Berechnung bestimmter Integrale

Stammfunktionen helfen bei der Berechnung von Integralen:
Ist F eine Stammfunktion von f so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$\int_1^3 x^2 + 4\ dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + 4x\right]_1^3 = \left(\tfrac{1}{3}3^3 + 4 \cdot 3\right) - \left(\tfrac{1}{3}1^3 + 4 \cdot 1\right) = 21 - \tfrac{13}{3} = \tfrac{50}{3}$$

Aufgabe:

a) $\int_0^2 -x^2 + 2x\ dx = \Big[\qquad\Big] = \qquad - \Big(\qquad\Big) = $

b) $\int_1^3 4x^3\ dx = $

c) $\int_0^\pi -\sin(x)\ dx = $

d) $\int_0^4 e^{0,5x}\ dx = $