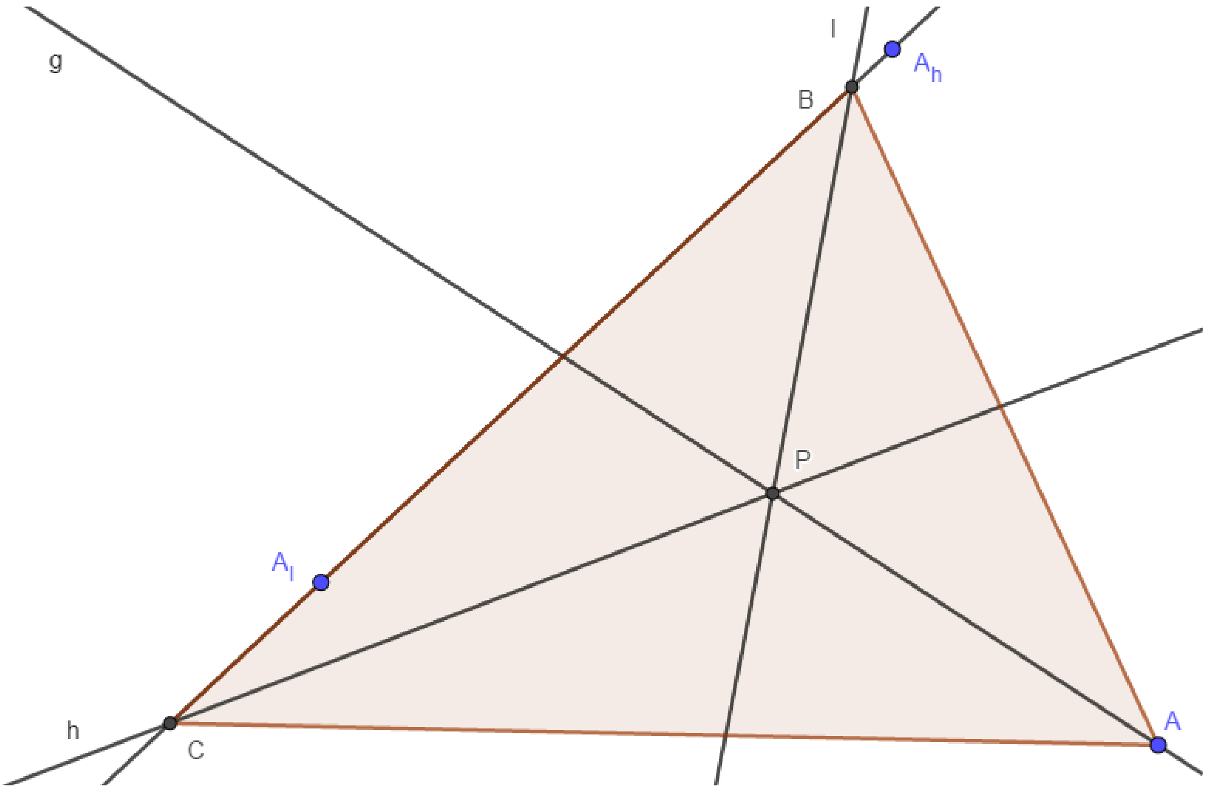
Konstruktion eines Dreiecks um die Winkelhalbierenden

Gegeben seien drei Geraden g, h, l, die sich im Punkt P schneiden.
Gesucht ist ein Dreieck $\triangle$ABC, zu welchem die Geraden g, h, l die Winkelhalbierenden sind.
Dazu schlägt Maximilian die folgende Konstruktion vor:

- Wähle einen Punkt A auf g, der von P verschieden ist.
- Der Spiegelpunkt von A an h sei A_h, der Spiegelpunkt von A an l sei A_l.
- Die Schnittpunkte der Geraden g(A_h; A_l) mit h bzw. l seien B bzw. C.
- $\triangle$ABC ist das gesuchte Dreieck.



Ist diese Konstruktion eigentlich (immer) durchführbar?
Prüfe dafür jeden Schritt und argumentiere!

Schritt 1: Ja, da die Wahl von A auf g\P irrelevant ist, weder Entfernung noch Richtung ändern das Ergebnis.

Schritt 2: Ja, da die Spiegelung eindeutig ist. Und da wir nicht auf einem Blatt Papier arbeiten, sondern einer unendlichen Ebene, ist dies auch immer möglich.

Schritt 3: Ja, denn da sich h und l nur in P schneiden, sind sie nicht identisch.
Deshalb kann auch g($A\_h; A\_l$) nicht identisch zu h oder l sein, also existieren eindeutige Schnittpunkte.

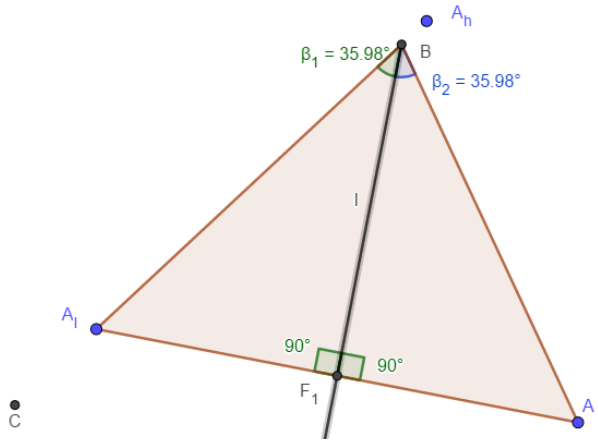
Als letztes überprüfen wir noch den 4. Schritt:
Liefert die Konstruktion tatsächlich das gesuchte Dreieck?

Man bezeichne den Lotfußpunkt von dem Lot auf h durch A mit
F_h den Fußpunkt vom Lot auf l durch A mit A_l und g(A_h, A_l) ∩ g = : {F_g}.

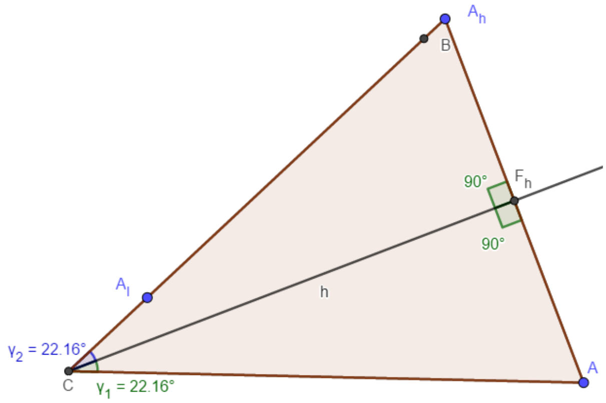
Um zu zeigen, dass g, h & l tatsächlich
Winkelhalbierende sind, muss gelten:
(i) $\beta_1 = \beta_2$ (ii) $\gamma_1 = \gamma_2$ (iii) $\alpha_1 = \alpha_2$

Beweis:
(i) $\beta_1 = \beta_2$
Man betrachte $\triangle BA_lF_l$ und $\triangle BAF_l$.
Diese haben folgendes gemeinsam:
- $|\overline{A_lF_l}|=|\overline{AF_l}|$
- $|\angle BF_lA_l|=|\angle BF_lA|$ = 90 $^\circ$
- $\overline{BF_l}$ als gemeinsame Seite

Mit dem Kongruenzsatz SWS folgt nun
$|\triangle BA_lP| \cong |\triangle BAP|$
$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2.$



(ii) $\gamma_1 = \gamma_2$
Tipp: Suche wie bei (i) 2 geeignete Dreiecke, beweise analog und zeichne eine Skizze!
Man betrachte $\triangle CF_hA_h$ & $\triangle CAF_h$.
Diese haben folgendes gemeinsam:
- $|\overline{A_hF_h}|=|\overline{F_hA}|$
- $|\angle CF_hA_h|=|\angle CF_hA|$ = 90 $^\circ$
- $\overline{CF_h}$ als gemeinsame Seite
SWS $\Rightarrow |\triangle CF_hA_h| \cong |\triangle CAF_h|$
$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$



(iii) $\alpha_1 = \alpha_2$
Seien D, E und F Lotfußpunkte der Lote auf $\overline{AB}, \overline{AC}\ bzw.\ \overline{BC}$ durch P.
Das ☐ADPE können wir über die beiden gegenüberliegenden rechten Winkel und die gleichlangen Seiten $\overline{DP}, \overline{PE}$, sowie $\overline{EA}$, $\overline{AC}$ als Diagonale, welche die andere halbiert.
Also ist g auch die Winkelhalbierende für $\angle DPE$ und $\angle EAD = \alpha$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$