Was ist eine Zufallsvariable?

Zufallsvariable

Eine **Zufallsvariable** oder **Zufallsgröße** ist ein Begriff aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man bezeichnet damit eine Funktion, die den möglichen Elementarereignissen eines Zufallsversuchs jeweils eine Zahl zuordnet.

Bei dem Begriff "Funktion", darf man sich an dieser Stelle nicht die bisherigen bekannten Funktionen, wie z.B. Kostenfunktionen oder Gewinnfunktionen vorstellen.

Es handelt sich hier um eine Zuordnungsregel. Für jedes Elementarereignis wird festgelegt, welche Zahl zu diesem Ergeignis gehört.

Am Besten versteht man das Ganze an einem **Beispiel**:

Ein Würfel wird zweimal gewürfelt. Damit sind folgenden Elementarereignisse möglich: (1, 1) , (1,2) ,... , bis (1,6). Das ist bis jetzt noch keine Zufallsvariable, sondern ein Zufallsexperiment.

Je nachdem, wofür man sich bei diesem Experiment interessiert, kann man sich jetzt verschiedene Zufallsvariablen überlegen, die unterschiedliche Eigenschaften von diesem Experiment beschreiben.

Beispiel 1: Man interessiert sich für die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen. Dann wird mit der Zufallsvariable X jedem Elementarereignis genau die Summe der beiden Würfe zugeordnet:

Wurf 1	Wurf 2	X: zugeordneter Wert
1	1	2
1	2	3
1	3	4
...	...	...
6	6	12

Zuordnungstabelle für Beispiel 1

Beispiel 2: Genauso könnte man anstelle der Summe der Augen, den Elementarereignissen auch die Anzahl der Sechsen zuordnen. Dann würde z.B. dem Ereignise (1,1), (2,1), etc. die Zahl 0 zugeordnet, bei (6, 1) ,(1,6), etc. die Zahl 1 und bei (6,6) die Zahl 2.

Man könnte auch die Gewinne und Verluste bei einem Glücksspiel den einzelnen Ereignissen zuordnen. Die Zufallsvariable drückt die Zahlenwerte aus, die man bei einem Experiment untersuchen möchte.

Zur näheren Erläuterung könnt ihr euch noch das verlinkte Video anschauen.

https://www.youtube.com/watch?v=unwJSkloq8M

Link: https://youtu.be/

YouTube-

Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ordnet man jeder Ausprägung, also jedem möglichen Wert, einer Zufallsvariable seine Wahrscheinlichkeit zu, so erhält man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

D.h. für jeden möglichen Wert der Zufallsvariable x_i wird der Wert $P(X=x_i)$ angegeben.

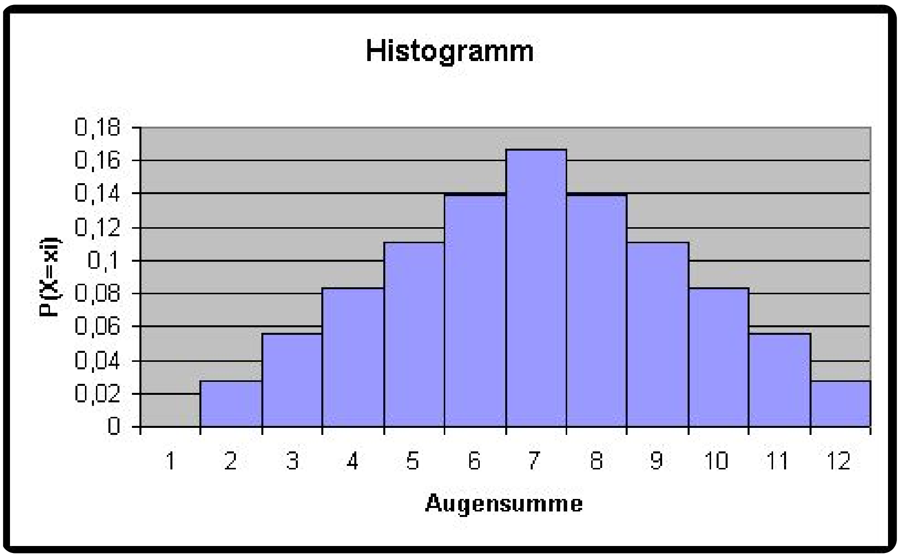
Wahrscheinlichkeitsverteilungen gibt man üblicherweise als Tabelle oder als Histogramm (Säulendiagramm an). Für die Beispiele von der vorherigen Seite erhält man folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

x_i	$P(X=x_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
...	...
11	2/36
12	1/36

Wahrscheinlichkeitsverteilung Beispiel 1

x_i	$P(X=x_i)$
0	25/36
1	10/36
2	1/36

Wahrscheinlichkeitsverteilung Beispiel 2



Histogramm Augensumme

Was ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen?

Erwartungswert

Der Erwartungswert beschreibt den Wert, den man langfristig im Durchschnitt als Ergebnis einer Zufallsvariablen erwarten kann. Mit dem Erwartungswert berechnet man also, welcher Wert eine Zufallsvariable bei einer großen Anzahl an Versuchen annehmen sollte.

Wirft man z.B. 10 mal eine Münze und ordnet den Elementarereignissen die Anzahl zu, wie oft Kopf geworfen wurde, so erwartet man langfristig, dass 5 mal Kopf vorkommt. Der Erwartungswert für diese Zufallsvariable ist als 5.

Zur Berechnung des Erwartungswertes gibt es eine Formel:

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \cdot x_i = P(X_1) \cdot x_1 + \ldots + P(X_n) \cdot x_n$$

Zur Erläuterung der Formel berechnen wir den Erwartungswert für die Summe zweier Würfelwürfe. Dazu benötigen wir die einzelnen möglichen Ergebnise x_i und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_i)$.

$$\mu(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Wirft man also sehr oft zwei Würfel, so kann man langfristig im Durschnitt das Ergebnis 7 erwarten.

Besonders nützlich wird der Erwartungswert im Zusammenhang mit Glücksspielen oder der Berechnung von zu erwartenden Kosten, etc.

Erwartungswert

https://www.youtube.com/watch?v=h6oLhYTGCs0

YouTube-Video

Link: https://youtu.be/

Beispielaufgabe: Ein Kaufhaus beabsichtigt für eine Sonderaktion eine größere Menge an Dampfbügelstationen zu kaufen. Dazu hat das Kaufhaus zwei Angebote vorliegen:

- A: Stückpreis 24,90 €, Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekt liegt bei 3%.
- B: Stückpreis: 25,10 €. Die Wahrscheinlichkeit für einen Defekl liegt bei 2%.

Ist ein Gerät von Anbieter A defekt, so fallen Reperaturkosten in Höhe von 12 € an. Bei Anbieter B liegen die Reperaturkosten bei 10,50€.
Für welchen Anbieter soll sich das Kaufhaus entscheiden, wenn 25 000 Stück gekauft werden sollen?

Lösung zur Beispielaufgabe:

Für Anbieter A und B sind die zu erwartenden Kosten zu berechnen. Die Zufallsvariablen X_A und X_B soll dabei jeweils die Kosten pro Gerät beschreiben:

Kosten x_i	$P(X_A=x_i)$ für Anbieter A
24,90 €	97%
36,90 €	3 %

Kosten x_i	$P(X_B=x_i)$ für Anbieter B
25,10 €	98%
35,60 €	2 %

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten könnten jetzt die erwarteten Kosten pro Gerät für beide Anbieter berechnet werden:

$$\mu(X_A) = 24{,}90 \cdot 0{,}97 + 36{,}90 \cdot 0{,}03 = 25{,}26$$

$$\mu(X_B) = 25{,}10 \cdot 0{,}98 + 35{,}60 \cdot 0{,}02 = 25{,}31$$

Die zu erwartenden Kosten sind bei Anbieter A mit 25,26 € geringer als bei Anbieter B mit 25,31. Bei einer Bestellung von 25 000 Stück wäre Anbieter A damit 1250 € günstiger.