Mathematik mit der HBS91

OBERBERGISCHER KREIS
BERUFSKOLLEG
DIERINGHAUSEN

Was ist die Ableitung?
In den vergangenen Stunden haben wir uns mit dem Begriff der „Ableitung“ beschäftigt. Ich möchte diesen hier nochmals kurz ins Gedächtnis rufen.
Hierzu ein kleines Beispiel:
Ich fahre mit meinem Auto los und beschleunige innerhalb der ersten 10 Sekunden auf 50km/h. Danach fahre ich für 17 Sekunden exakt 50km/h und bremse dann auf 10km/h ab. Zeichne den entsprechenden Graphen auf. Die x-Achse stellt die Zeit in Sekunden dar. Die y-Achse ist die Geschwindigkeit in kmh*, wobei ein Zentimeter 10km*h entsprechen.
Schauen wir uns nun mal zum Beispiel die Sekunden 14 an. Wie hat sich hier die Geschwindigkeit (von links nach rechts gesehen) verändert? - Gar nicht. Die Geschwindigkeit ist konstant gleich geblieben. Oder anders gesagt: Die Änderungsrate betägt Null.
Schauen wir uns nun die Sekunden 6 an. Wie hat sich hier die Geschwindigkeit verändert? Offensichtlich hat sich die Geschwindigkeit erhöht. Oder anders gesagt: Die Änderungsrate ist positiv.
Und als drittes schauen wir uns die Sekunden 19 an. Die Änderungsrate ist negativ, da sich offensichtlich die Geschwindigkeit verringert hat.
Änderungsrate ist die Ableitung
Statt „Änderungsrate“ hat sich der Mathematiker den Begriff „Ableitung“ ausgesucht. Die Ableitung wird mit $f'(x)$ bezeichnet. Mit Hilfe der Ableitung lässt sich also die Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen.
Nun wollen wir nochmal darauf gucken, wie man die Ableitung bildet. Hierzu erst einmal ein paar Beispiele:

$f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x^1$
$f(x) = 3x^4 \to f'(x) = 3 \cdot 4x^3$
$f(x) = \frac{3}{4}x^6 \to f'(x) = \frac{3}{4} \cdot 6x^5$

Verallgemeinerung
Ganz allgemein sieht das dann so aus:
$f(x) = a \cdot x^n \to f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$
Oder in Worten ausgedrückt:
- Schreibe die Aufgabenstellung beginnend mit $f(x) = ...$ ab
- Schreibe $f'(x) =$ auf
- Schreibe die Zahl vor dem x hinter das Gleichheitszeichen
- Schreibe das x hin
- Schreibe als Hochzahl an das x die Zahl von der ursprünglichen Funktion minus eins.
Natürlich kannst Du die Hochzahl auch direkt ausrechnen.
Hintereinander
Es gibt auch Funktionen, die mehr als nur einmal das x enthalten. Also zum Beispiel $f(x) = 3x^4 - x^2$. Wie lautet dann hier die Ableitung? Oben haben wir bereits die Ableitung von $3x^4$ und von x^2 bestimmt. Diese schreiben wir einfach ab und setzen dazwischen das Minuszeichen, weil dieses auch in der Funktion die beiden Teile verbindet. Also:
$f(x) = 3x^4 - x^2$
$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2x$
Vereinfachung
Die Ableitung bei Teilen, wo nur ein x vorkommt, ist einfach nur die Zahl vor dem x. Also zum Beispiel
$f(x) = ... + 4x \to f'(x) = ... + 4.$
Ist in einem Teil kein x vorhanden, fällt dieser Teil in der Ableitung einfach weg. Also zum

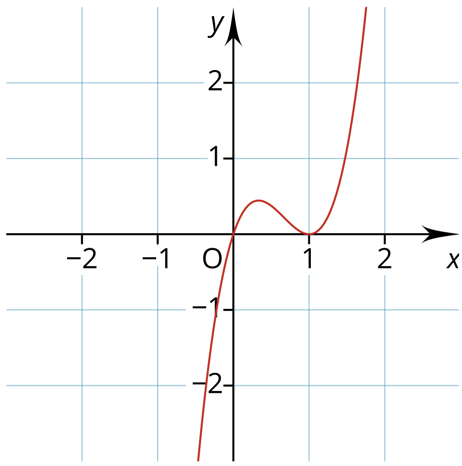
① Wir wollen uns dies auch grafisch noch einmal verdeutlichen.

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 3x$. Überlege Dir, wie die Änderungsrate zu den unterschiedlichen x-Werten ist. Ist die Änderung überall identisch? Ist Sie überall positiv oder negativ?
- Bestimme nun die Ableitung und zeichne den dazu gehörigen Graphen. Wie ist die Änderungsrate an der Stelle $x = 1$, $x = 2$ und $x = 5$?

② Und das gleiche noch einmal:

- Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^4$. Überlege Dir, in welchen Bereichen der Graph steigt, und in welchen Bereichen der Graph fällt. Gibt es Punkte, wo der Graph weder steigt noch fällt?
- Bestimme nun die Ableitung und zeichne den dazu gehörenden Graphen. Kannst Du deine Überlegungen zum Steigen und Fallen in diesem Graphen wiederfinden?

Schauen wir uns nun die Funktion $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x$ an. Der Graph der Funktion ist hier rechts dargestellt. Wenn Du den Verlauf des Graphen beschreiben müsstest, würdest Du vermutlich auch so etwas ähnliches wie ich formulieren: „Die Funktion steigt stark an. Zwischen 0 und 1 ist der höchste Punkt erreicht und danach fällt sie auf den Wert 0 zurück.“



Aber: Wo genau ist der höchste Punkt? Welche Änderungsrate ist am höchsten Punkt?

Überlegen wir doch noch einmal zusammen: Wenn die Funktion die ganze Zeit steigt, heißt das, dass die Änderungsrate positiv ist. Fällt die Funktion hingegen, so ist die Änderungsrate negativ. Und welcher Wert liegt zwischen positiv und negativ? Richtig, die Null. Was müssen wir also nur tun, um den höchsten Punkt einer Funktion zu finden? Richtig, wir müssen berechnen, wann die Änderungsrate den Wert Null hat.
Probieren wir es aus: Bestimme die Ableitung der Funktion! Wenn Du alles richtig gemacht hast, erhältst Du $f'(x) = 9x^2 - 12x + 3$ Und nun berechnen wir mit der abc-Formel, wann gilt: $9x^2 - 12x + 3 = 0$
Hier solltest Du zwei Ergebnisse herausbekommen: $x_1 = \frac{1}{3} = 0{,}333$ und $x_2 = 1$

Zum Vorausdenken
Bilde von $f'(x) = 9x^2 - 12x + 3$ die Ableitung. Die Ableitung von der Ableitung wird mit $f''(x)$ bezeichnet. Setze in f'' einmal x_1, und einmal x_2 ein. Wenn die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich bei dem betreffenden x-Wert um einen Hochpunkt. Ist die zweite Ableitung hingegen positiv, so ist es ein Tiefpunkt. Stimmt dies bei unserer Funktion auch?

Wenn etwas unklar ist, oder Ihr an der ein oder anderen Stelle nicht weiterkommt, könnt ihr mich anrufen/anschreiben: 0151 74203112